Biblioteca
PRÁCTICA DEL BACHILLER

Matemática fácil

ÍNDICE

ARITMÉTICA

1. La numeración 5
2. Los números naturales 7
3. Los números enteros 11
4. Los números primos 14
5. Los números racionales 18
6. La potenciación 26
7. La radicación 28
8. Los números irracionales 30
9. Las razones y las proporciones 31
10. La regla de tres 34
11. El interés 37

ÁLGEBRA

1. La teoría de los Conjuntos 41

GEOMETRÍA

1. El punto 47
2. La línea 48
3. La superficie 49
4. Los ángulos 50
5. Los polígonos 52

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

1. Medidas de longitud 58
2. Medidas de superficie 60
3. Medidas de volumen 61
4. Medidas de capacidad 62
5. Medidas de masa 63
6. Otras medidas de masa 64

ARITMÉTICA

LA NUMERACIÓN

Los números se representan por signos llamados **cifras**. En el **sistema** de numeración **decimal** –el que utilizamos habitualmente– se usan las cifras: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.
Excepto el "0", cifra que no tiene valor por sí misma, las otras, del 1 al 9 se llaman **cifras significativas.**
Los números de una cifra se llaman **dígitos** y los formados por 2 o más cifras se llaman **polidígitos.**

En algunos países, como Estados Unidos de América, un billón equivale a mil millones.

Sistema de numeración romana

Se trata de un modo de numeración a base de símbolos (letras del alfabeto): **I - V - X - L - C - D - M.** Sus valores se hallan representados en la tabla:

I	uno	III	3	MDCCVII	1.707
V	cinco	IV	4	MCMXCII	1.992
X	diez	VIII	8	MMMDCLXXVI	3.676
L	cincuenta	IX	9	$\overline{IV}$CD XLIX	4.449
C	cien	XV	15	$\overline{LX}$CXXXVIII	60.138
D	quinientos	XL	40	$\overline{MCCCLXX}$DIV	1.370.504
M	mil	XC	90	$\overline{MMCDLXII}$CCIX	2.462.209
M	millón	DCCLX	760	$\overline{XXVCMXL}$LXV	25.940.065

Propiedades de la numeración romana

Para expresar números que no están representados por un símbolo de los mencionados, se combinan entre sí. Para ello existen estas propiedades:

1. Si a la derecha de un símbolo colocamos otra de igual o superior valor, los valores se suman.

Ejemplos: $\underset{500}{D}\ \underset{50}{L}\ \underset{5}{V} = 555$ **y** $\underset{10}{X}\ \underset{10}{X}\ \underset{5}{V} = 25$

2. Una cifra o símbolo situada a la izquierda de otra cifra y cuyo valor es menor, se resta de la anterior.

Ejemplo: **CMXIX= 949**

$\underset{100}{C}\ \underset{1000}{M} = (900)$ $\underset{10}{X}\ \underset{50}{L} = (40)$ $\underset{1}{I}\ \underset{9}{X} = (9)$

3. Los símbolos I, X, C, M repetidos 2 o 3 veces duplican o triplican su valor. No se repiten más de tres veces.

Ejemplo: XXX=30   MMM= 3.000 CC= 200

4. Cada raya colocada encima de un símbolo o grupo de símbolos los multiplica por mil.

Ejemplo: $\overline{IV}$ **=4.000** $\overline{X}$ **= 10.000** $\overline{M}$ **= 1.000.000**

Los números romanos se utilizan, actualmente, entre otras cosas, para numerar capítulos de libros, citar fechas, en algunos relojes y para nombrar los siglos.

LOS NÚMEROS NATURALES

Los números naturales son una agregación infinita de unidades.

N= 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9

Suma de números naturales

La suma de números naturales es la operación que permite reunir en un sólo número todas las unidades de varios números. Cada uno de los números sumados se conoce con el nombre de **sumando**, al resultado se le llama suma y la operación se representa con el signo más (+).

Ejemplos: $3 + 1 = 4$

$4 + 6 + 1 + 2 = 12$

Propiedades

La suma de los números naturales cumple las siguientes propiedades:

- **Asociativa**: a + (b+c) = (a+b) + c

  Ejemplo 2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4

  2 + (7) = 9 y (5) + 4 = 9

- **Conmutativa**: a + b = b + a
- El "0" se considera el **elemento neutro** en la suma de números naturales. Es decir, todo número sumado al "0" nos da como resultado el mismo número:

  Ejemplo: A + 0 = 0 + A = A

  2 + 0 = 2 y 0 + 2 = 2

- **Uniforme:** la suma de dos números naturales es siempre un número natural.

Resta de números naturales

La **resta** de números naturales es la operación **opuesta** a la suma. En esta operación, a un número denominado **minuendo** se le quita otro llamado **sustraendo**. Entre estos dos números se coloca el signo **(-) menos.**

En los números naturales la resta sólo es posible cuando el minuendo es mayor que el sustraendo.

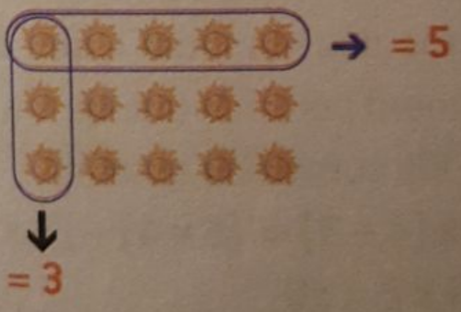
Ejemplo:

7	-	3	=	4
Minuendo		Sustraendo		Resultado

Multiplicación de números naturales

La **multiplicación** es la operación que tiene por objeto la suma de un número llamado **multiplicando** tantas veces como indique otro número que se llama **multiplicador**. Al resultado se le llama **producto** de factores. Los signos que se utilizan para multiplicar son: **(x), (.) ó (*)**. Estos se colocan entre el multiplicando y el multiplicador –llamados también factores– para indicar que ambos números se multiplican entre sí.

Ejemplo:



es decir

5	*	3	=	15
5	x	3	=	15
5	.	3	=	15
Multiplicando		Multiplicador		Producto

Propiedades

La multiplicación de los números naturales cumple con las siguientes propiedades:

- **Asociativa:** muestra que a x (b x c) = (a x b) x c.

  Ejemplo **2 x (3 x 4) = (2 x 3) x 4**

  2 x (3 x 4) = 2 x 12 = 24

  (2 x 3) x 4 = 6 x 4 = 24

- **Conmutativa:** el orden de los factores no altera el producto, o sea que a x b = b x a.

  Ejemplo: **5 x 4 = 4 x 5**

  5 x 4 = 20 y 4 x 5 = 20

- **Distributiva**: En la multiplicación la propiedad distributiva cumple: **a x (b + c) = (a x b) + (a x c).** Es decir que, si multiplicamos un número por la suma de otros dos, es igual a que si multiplicamos ese número por cada uno de los sumandos y el resultado los sumamos entre sí.

  Ejemplo: **5 x (4 + 3) = (5 x 4) + (5 x 3)**

  5 x 7 = 35

  (5 x 4) = 20

  (5 x 3) = 15

  20 + 15 y 35

- **Elemento neutro** del producto de números naturales es la unidad (**1**) al cumplir que **a x 1 = 1 x a = a,**

elemento separador entre los positivos y los negativos:

$$Z = (\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Suma de números enteros

La suma de los números enteros cumple las siguientes propiedades:

- **Asociativa:** $a + (b+c) = (a+b) + c$

  Ejemplo $2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$

  $2 + (7) = 9$ y $(5) + 4 = 9$

- **Conmutativa:** $a + b = b + a$
- **Elemento neutro** es la suma de un número natural con el cero (0): y se verifica que $a + 0 = 0 + a = a$.
- **Elemento simétrico:** la suma de un número natural y su simétrico es siempre el elemento neutro (0), es decir que $a + s = s + a = 0$ de donde se deduce que $s = -a$.

  Ejemplo: Si a es = 3, s es = a - 3

  $a + s = 0$

  $3 + (-3) = 0$

Resta de números enteros

Para restar dos números enteros basta con sumar al primero el simétrico del segundo.

Ejemplo

Si tomamos los pares (a,b) y (c,d) para efectuar la resta realizaremos la siguiente operación:

$$(a,b) - (c,d) = (a,b) + (d,c) = (a + d, b + c).$$

Multiplicación de enteros

Sean dos números enteros (a,b) y (c,d) se define el producto con la operación:

$$(a,b) \times (c,d) = (ac + bd), (ad + bc)$$

El producto tendrá signo **positivo** si los signos de ambos números son iguales:

$$+ \times + = +$$
$$- \times - = +$$

El producto tendrá signo **negativo** si los signos de los números son diferentes:

$$+ \times - = -$$
$$- \times + = -$$

La multiplicación de números enteros cumple con las mismas propiedades que la multiplicación de números naturales: **asociativa, conmutativa distributiva, elemento neutro y uniforme.**

División de números enteros

Los números enteros se dividen de la misma manera que los números naturales anteponiendo el signo correspondiente, pero teniendo en cuenta que si **el dividendo y el divisor son del mismo signo el cociente es positivo** y si **son de distinto signo el cociente es negativo**. La división de dos números naturales no es siempre un número entero, es decir la división no siempre es exacta.

LOS NÚMEROS PRIMOS

Múltiplos y divisores. Un número "**m**" es **múltiplo** de un número "**n**" cuando **al dividir "m":"n" el resultado es cero** (0). Por eso se dice que: **"m" es divisible por "n"** o bien **que "n" es un divisor de "m".** Así **26 es múltiplo de 13** porque al efectuar la división 26:13 el cociente es 2 y **el resto es cero** (0). También se deci que: **13 es divisor de 26** y que **26 es divisible por 13**.

Cuando un número es divisible por sí mismo y por la unidad se dice que es un número primo. El 7 es un número primo porque sólo es divisible por uno sí mismo y por la unidad (1).

Cuando un número es divisible por sí mismo, por la unidad y por otros números se llama número compuesto.

Ejemplo: el 6 es un número compuesto porque: es divisible por 1, es divisible por 6, es divisible por 2 y es divisible por 3.

Todo número compuesto puede escribirse como producto de números primos. Para **descomponer** un número en el producto de sus **factores primos,** Se escribe el **número** y, a su derecha, se traza una línea vertical a cuya derecha se escribe **el menor de los divisores del primer número**, que sea un **número primo**. El **cociente resultante** se escribe debajo del primero y se vuelve a dividir por el menor de sus divisores que sea un número primo y así hasta encontrar como cociente un número primo:

Ejemplo:

840	2
420	2
210	2
105	3
35	5
7	7
1	1 ⟶ $840 = 2^3 . 3 . 5 . 7 . 1$

TABLA DE NÚMEROS PRIMOS

1	2	3	5	7	11	13
17	19	23	29	31	37	41
43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103
107	109	113	127	131	137	139
149	151	157	163	167	181	191
193	197	199	211	223	227	229
233	239	241	251	257	263	269

Máximo común divisor (m.c.d.)

El **máximo común divisor** de varios números **es el mayor de los divisores comunes** que resulta de descomponer cada uno de ellos.

Para hallar el máximo común divisor de varios números hay que descomponer los números en sus factores primos y luego calcular el **máximo común divisor.**

Para calcular **el máximo común divisor** hay que multiplicar entre sí todos los factores primos comunes que tengan el **menor exponente.**

Si queremos hallar el máximo común divisor de 960 y 1200 desarrollaremos la operación que aparece en el cuadro siguiente:

960	2	1200	2
480	2	600	2
240	2	300	2
120	2	150	2
60	2	75	3
30	2	25	5
15	3	5	5
5	5	1	
1			

$960 = 2^6 \times 3 \times 5$ $\quad$ $1200 = 2^4 \times 3 \times 5$

m.c.d. $(960, 1200) = 2^4 . 3 . 5 = 240$

Mínimo común múltiplo (m.c.m.)

El **mínimo común múltiplo** de varios números corresponde al menor de los múltiplos comunes de dichos números.

Para **hallar el mínimo común múltiplo** de varios números se descomponen éstos en factores primos. Luego se multiplican todos los factores primos comunes y no comunes elevados al **mayor exponente**.

Si queremos hallar el mínimo común múltiplo de 30, 40, y 50 haremos la siguiente operación:

30	2		40	2		45	3
15	3		20	2		15	3
5	5		10	2		5	5
1			5	5		1	
			1				

$30 = 2 \, . \, 3 \;\; 5$ **$40 = 2^3 \, . \, 5$** **$45 = 3^2 \, . \, 5$**

m.c.m. $(30, 40, 45) = 2^3 \, . \, 3^2 \, . \, 5 = 360$

LOS NÚMEROS RACIONALES

Las fracciones

Los números naturales nos sirven para contar, los número enteros nos sirven para medir ciertas magnitudes y sus variaciones (por ejemplo, la temperatura), y los **números racionales** son los que nos permiten **dividir la unidad en partes**, por ejemplo qué parte del pastel representa un trozo de los 6 en los que se ha dividido. Para ello se utilizan las **fracciones. La fracción** es cada una de las partes en que dividimos un todo.

Para **representar** un número racional utilizaremos un par de números naturales separados por una rayita horizontal o inclinada.

Ejemplo: a/b o $\frac{a}{b}$

El número situado a la derecha o debajo de la raya (b), es el número de partes en que hemos dividido la unidad y recibe el nombre de **denominador**, mientras que, el número a la izquierda de la raya inclinada o el situado en la parte superior es el **numerador**. Éste corresponde al número de partes que consideramos de las totales en que hemos dividido el todo.

Por ejemplo, en el caso de un pastel dividido en seis partes, si tomamos 2 trozos de los seis en que está dividido lo representamos así: $\frac{2}{6}$ y significa las 2 sextas partes del todo.

Una **fracción** es **común** cuando su denominador no es la unidad seguida de ceros. Se llama **fracción propia** cuando el **numerador es menor que el denominador** y fracción **impropia** cuando el **numerador es mayor que el denominador**. Toda **fracción impropia** se puede descomponer en dos partes, que serán la suma de un entero y una fracción propia.

Ejemplo:
Si tenemos $\frac{8}{6}$ de pastel

necesitaremos 1 pastel (que dividiremos en seis partes) + $\frac{2}{6}$ de otro pastel. Es decir que

$\frac{8}{6}$ de pastel es igual a **1 pastel +** $\frac{2}{6}$ de pastel

Para **descomponer una fracción impropia** en la suma de un entero y de una fracción propia **se divide el numerador entre el denominador**: el cociente entero indica el número de veces que está contenida la unidad y el resto será el numerador de la fracción impropia.
Ejemplo: 8 : 6 = 1 y el resto es 2,
Por lo tanto el resultado es: $1 + \frac{2}{6}$

Si al dividir el numerador entre el denominador, el resto es cero (0), la fracción es igual a un número entero.
Ejemplo: $\frac{8}{2}$ = **4** ya que **8 : 2 = 4** y el resto es **0**

Un número entero se puede transformar en una fracción en la el numerador es el número entero y el denominador la unidad:

Ejemplo: $\frac{8}{1} = 8$

Dos fracciones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$

son equivalentes cuando se cumple que cuando se cumple que: a . d = b . c.

Ejemplo: Si tenemos las fracciones $\frac{2}{4}$, $\frac{6}{12}$

son equivalentes porque:

si a = 2, b = 4, c = 6, d = 12

$2 \times 12 = 4 \times 6$, es decir: $2 \times 12 = 24$ y $4 \times 6 = 24$

Para obtener una fracción equivalente a otra basta con multiplicar o dividir el numerador y el denominador por el mismo número:

Ejemplo: Si tenemos la fracción $\frac{2}{4}$

y multiplicamos su denominador y numerador por 6, obtendremos $\frac{12}{24}$, una fracción equivalente

Lo comprobamos: $2 \times 24 = 4 \times 12$, es decir: $2 \times 24 = 48$ y $4 \times 12 = 48$

Propiedades de los números racionales

- **Reflexiva**: toda fracción es equivalente a sí misma.
- **Simétrica:** si una fracción es equivalente a otra, ésta a su vez es equivalente a la primera.

- **Transitiva:** si una fracción es equivalente a otra y ésta es equivalente a una tercera, se cumple que la primera fracción es equivalente a la tercera.
- Cada uno de los conjuntos formados por todas las fracciones equivalentes entre sí forma una clase de equivalencia, llamada **número racional.**
- **Una fracción es irreductible** cuando el numerador y denominador son números primos.
- **Simplificar** una fracción es reducirla a una fracción equivalente cuyos valores sean menores que la original hasta que se convierta en una fracción irreductible.

Suma de números racionales

Para sumar dos números racionales o fracciones hay que tener en cuenta si son de igual o distinto denominador.

Para sumar fracciones de igual denominador: se suman los numeradores y se deja el mismo denominador: $\frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$

Para sumar fracciones de diferente denominador se reducen las dos fracciones al mínimo común denominador y luego se suman:

$\frac{3}{4} + \frac{1}{6}$ Si descomponemos los denominadores

4	2		6	2
2	2		3	3
1			1	

el m.c.m = $2^2 . 3 = 12$

$12 : 4 = 3$ y $12 : 6 = 2$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12} \quad y \quad \frac{1}{6} = \frac{1 \times 2}{6 \times 2} = \frac{2}{12}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \frac{11}{12}$$

Para **sumar dos o más fracciones se reducen todas al mínimo común denominador.** El **numerador** se obtiene sumando todos los numeradores resultantes y el **denominador** es igual al mínimo común denominador de las fracciones sumadas.

Resta de números racionales

Hay que seguir el mismo procedimiento que para la suma de fracciones.

Para restar fracciones con igual denominador se restan los numeradores entre sí y se deja el mismo denominador.

Para restar fracciones de distinto denominador se halla el mínimo común denominador. El **numerador** se obtiene de la diferencia entre los numeradores resultantes, mientras que el **denominador** es el mínimo común denominador de las fracciones dadas.

Multiplicación de números racionales

Para multiplicar dos o más números racionales se multiplican los numeradores entre sí y, a continuación, los denominadores.
cumpliendo las propiedades conmutativa, elemento neutro, elemento simétrico y propiedad uniforme; Respecto a la suma, se cumple también la propiedad distributiva.

Ejemplo: $\frac{2}{4} \times \frac{6}{12} = \frac{2 \times 6}{4 \times 12} \times \frac{12}{48}$

División de números racionales

Para dividir dos números racionales o una fracción, se multiplica el primero por el inverso del segundo:

Ejemplo: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$, es decir

$$\frac{2}{4} : \frac{3}{5} = \frac{2}{4} \times \frac{5}{3} = \frac{10}{12}$$

Sólo se pueden dividir dos números racionales si el divisor es distinto de cero "0".
Para dividir un número entero con una fracción, se convierte el número entero en fracción. Se consigue colocando como denominador la unidad "1" y se realiza la división de la manera señala da anteriormente:

Ejemplo:

$$12 : \frac{2}{4} = \frac{12}{1} : \frac{2}{4} = \frac{12}{1} \times \frac{4}{2} = \frac{12 \times 4}{1 \times 2} : \frac{48}{2}$$

Conversión de número mixto a fracción

Para convertir un número mixto en un número fraccionario, **el numerador es igual** al producto del número entero por el denominador y la suma del numerador y el denominador es el mismo de la fracción:

Ejemplo:

$$7 : \frac{2}{5} = \frac{(7 \times 5) + 2}{5} = \frac{35 + 2}{5} = \frac{37}{5}$$

Para **dividir números mixtos y fracciones entre sí** se convierten primero en números fraccionarios y luego se realiza la división de la forma que se hace habitualmente.

LA POTENCIACIÓN

Es la representación abreviada de la **multiplicación** por sí mismo de un número al que denomina **base**, tantas veces como le indica el **exponente**:

Ejemplo: $3^4 = 3 . 3 . 3 . 3 = 81$,
donde **3** es la **base** y **4** el **exponente**

Si el exponente es 2 calculamos el cuadrado del número o base. Cuando el exponente es 3 buscamos el cubo del número o base.

- Si **la base es positiva** el **resultado** es siempre **positivo**
- Si la **base es negativa** se consideran dos casos:
  - si el **exponente es par** el resultado es positivo
  - y si el **exponente es impar** el resultado tendrá signo negativo.

Propiedades:

- Para **multiplicar potencias de la misma base** se suman los exponentes y se deja la misma base: $6^2 . 6^3 = 6^{2+3} = 6^5$
- Para **dividir potencias de la misma base** se restan los exponentes y se deja la misma base: $4^5 : 4^2 = 4^{5-2} = 4^3$

- Al dividir potencias con igual base **puede resultar un exponente negativo**: $6^3 : 6^7 = 6^{3-7} = 6^{-4}$
- **Cuando resulta un exponente negativo** la potencia es igual a la unidad dividida por la potencia con exponente positivo: $4^{-4} = \dfrac{1}{4^4} = \dfrac{1}{256}$
- **Potencia de un producto:** $(a \,.\, b \,.\, c)^n = a^n \,.\, b^n \,.\, c^n$
- **Potencia de una fracción:**
$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \left(\frac{x^n}{y^n}\right)$$
- **Potencia de una potencia:** $(a^n)^m = a^{m.n}$
- Todo número **elevado a cero** es la unidad: $a^0 = 1$
- Todo número elevado a la unidad es el mismo número: $a^1 = a$
- **Suma de una potencia:** $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(3 + 5)^2 = 3^2 + 2 \,.\, 3 \,.\, 5 + 5^2 = 9 + 30 + 25 = 64$
- **Resta de una potencia:** $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(7 - 3)^2 = 7^2 - 2 \,.\, 7 \,.\, 3 + 3^2 = 49 - 42 + 9 = 16$
Cubo de una suma: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(5 + 4)^3 = 5^3 + 3 \,.\, 5^2 \,.\, 4 + 3 \,.\, 5 \,.\, 4^2 + 4^3 =$
$= 125 + 300 + 240 + 64 = 729$
- **Cubo de una resta:** $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$(5 - 4)^3 = 5^3 - 3 \,.\, 5^2 \,.\, 4 + 3 \,.\, 5 \,.\, 4^2 - 4^3 =$
$= 125 - 300 + 240 - 64 = - 175 + 176 = 1$

- La **diferencia entre los cuadrados de dos números naturales consecutivos** es igual al doble del menor aumentado en una unidad:
  $7^2 - 6^2 = 49 - 36 = 13 = \mathbf{(2 . 6) + 1}$
- La **diferencia entre los cuadrados de dos números naturales consecutivos** es la suma de los dos números: $7^2 - 6^2 = 49 - 36 = 13 = 7 + 6$
- La **diferencia entre los cuadrados de dos números cuadrados** es igual al producto de la suma de las bases, por la diferencia de las bases:
  $\mathbf{a2 - b2 = (a + b) . (a - b)}$
  $6^2 - 4^2 = 36 - 16 = \ . (6 + 4) . (6 - 4) = 10 . 2 = 20$

LA RADICACIÓN

La **raíz de un número (radicando)**, es otro número **b** que elevado a la potencia que indica el **índice** coincide con el número **a** (radicando): $\sqrt[n]{a} = b$

Es la operación inversa a la potenciación y consiste en hallar la base, conociendo el exponente y la potencia: $2^4 = 16 \rightarrow 2 = \sqrt[4]{16}$

El signo $\sqrt{\ }$ se llama **raíz** –radical–, **16** es el radicando –**subradical**–, **2**, en este caso, **es la raíz cuarta** y el **4 es** el **índice** de la raíz.

Propiedades

- Si a los dos miembros de una igualdad se extrae la misma raíz resultará otra igualdad.
- Si un número no tiene raíz entera no tendrá raíz fraccionaria.
- Para **sumar o restar raíces** se simplifican al máximo y, luego se realizan las operaciones que se indiquen, siguiendo las siguientes reglas.

$$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.\,b}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a} = a^{\frac{1}{m.n}}$$

- Para **racionalizar** una fracción **con una raíz en el denominador**, se **convierte** en otra **fracción equivalente cuyo denominador no tenga raíz**. Para racionalizar una fracción, se multiplican numerador y denominador por una raíz, de forma que al multiplicarla por el denominador la cambie a una raíz exacta. Es decir, se elimina la raíz del denominador y, se simplifica el resultado.

- Para elevar una raíz a una potencia, se eleva el radicando a dicha potencia.

LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Las raíces que dan como resultado **números que no son enteros o fraccionarios** forman el conjunto de **números irracionales:**

Ejemplo: $\sqrt{2} = 1{,}4142$; $\sqrt{3} = 1{,}7320508$

Dicho de otro modo: **los números irracionales son los que tienen una expresión decimal infinita y no periódica**

A este tipo de números, que **no se pueden expresar con un número racional** se les conoce como **números inconmensurables** y se representan por el símbolo: Q'.

Dentro de los números irracionales encontramos los **números trascendentes** como por ejemplo: π (se lee pi) que es la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro –que se estudia en geometría–.

Recordar

El conjunto de los números racionales y de los números irracionales forman el conjunto de los números reales.

LAS RAZONES Y LAS PROPORCIONES

Razones

Al resultado obtenido al dividir dos números entre sí se llama **razón**, o lo que es lo mismo, **la razón entre 2 cantidades es el cociente entre sus medidas con la misma unidad de medida.**

Es decir que, **para poder hablar de razón entre dos cantidades éstas deben ser conmensurables**, o sea, tener una unidad en común. La razón de 7 en 4 se representa 7/4 ó bien $\frac{2}{6}$, y se lee siete es a cuatro.

El **primer término** de una razón o numerador es el **antecedente** y el **segundo** o denominador es el **consecuente**.

Propiedades de las razones:

- Si el antecedente de una razón se multiplica o divide por un número cualquiera, la razón queda multiplicada o dividida por dicho número.
- Si el consecuente de una razón se multiplica o divide por un número cualquiera , la razón queda, dividida o multiplicada por dicho número.
- Si el antecedente y el consecuente de una razón se multiplican o se dividen por un mismo número, la razón queda inalterada.

Proporciones

Una proporción es la igualdad de dos razones, y se representa: $a/b = c/d$, o bien $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Se leen: a es a b como c es a d.

Los términos **a** y **d** son los **extremos** de la razón y los términos **b** y **c** se les denominan **medios**.

Las proporciones con **medios diferentes** se llaman **discretas** y con los **medios iguales** proporciones **continuas**:

extremo → a = c ← medio
medio → b = d ← extremo

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

La **media geométrica de una proporción continua** es cada uno de los medios iguales de la proporción.

medio → 3 = 5 ← medio
extremo → 5 = 8 ← extremo

$$\frac{3}{5} = \frac{5}{8}$$

5 es la media geométrica proporcional.

El valor de la media geométrica es la raíz cuadrada del producto de los extremos: $\sqrt{a.d}$.

A **cualquiera de los cuatro términos** de una proporción discreta se le llama **cuarta proporcional.**

En una proporción continua **al cuarto término** se le denomina **tercera** o **tercia proporcional**.

Propiedades de las proporciones:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

- En toda proporción se cumple que **el producto de medios es igual al producto de extremos:**

$$b \cdot c = a \cdot d$$

- En toda proporción se cumple que **un medio es igual al producto de extremos dividido por el otro medio.**

$$b = a \cdot d / c$$

- En toda proporción se cumple que un extremo es igual al producto de medios dividido por el otro extremo:

$$a = b \cdot c / d$$

Dos magnitudes son proporcionales cuando **al multiplicar o dividir una de ellas por un número** dado, **la otra** magnitud **queda multiplicada o dividida por el mismo número.**

Se dice que dos magnitudes **son directamente proporcionales** cuando **al multiplicar una de ellas por un número** dado**, la otra queda multiplicada por el mismo número** y **al dividir una de ellas por un número** dado, **la otra queda dividida por el mismo número.**

Son **inversamente proporcionales** cuando **al multiplicar una de ellas por un número** dado, **la otra queda dividida por el mismo número** y al **dividir una de ellas por un número** dado, **la otra queda multiplicada por el mismo** número.

LA REGLA DE TRES

La regla de tres **es la operación aritmética que busca calcular el cuarto término de una proporción cuando se conocen los otros tres términos**. Puede ser:

- **Simple**: si se conocen sólo dos términos
- **Compuesta**: si hay tres o más términos.

Los **datos conocidos** de una regla de tres se llaman **supuestos** y los **datos de la incógnita** se llaman **pregunta**.

Ejemplo: Si sabemos que 70 bolígrafos valen $600 y queremos averiguar cuánto cuestan 8.

Supuesto: 70 bolígrafos → $600

Pregunta: 8 bolígrafos → $x

La regla de tres se resuelve usando el método de las proporciones:

$$\frac{70}{8} = \frac{600}{x}$$

$$x = \frac{8 \times 600}{70} = \frac{4800}{70} = 68{,}57$$

El método anterior es el de la regla de **tres simple directa**; pues se deduce que por menos bolígrafos se pagará menos dinero.

Si planteamos el caso de un vehículo que lleva una velocidad constante de 80 km/h y recorre determinada distancia en 5 horas. ¿Qué velocidad debería alcanzar el automóvil para recorrer la misma distancia en sólo 4 horas?

Supuesto:	80 km/h	5 horas
Pregunta:	x=km/h	4 horas

Podemos ver que la velocidad del vehículo y el tiempo que tarda en recorrer la distancia dada son magnitudes inversamente proporcionales debido a que a más velocidad, menos tiempo, y a menos velocidad, más tiempo. Por lo tanto, se trata de **una regla de tres simple inversa** con la proporción:

$$\frac{80}{x} = \frac{5}{4} \rightarrow x\ \frac{80 \times 4}{5} = \frac{320}{5} = 64$$

En una regla de tres compuesta, se escribe el **supuesto** y la **pregunta** siguiendo el **mismo criterio de la regla de tres simple**, luego se compara cada

uno de los términos con la incógnita (dando por supuesto que los demás términos permanecen constantes), para comprobar si los valores son **directa** o **inversamente proporcionales** a la **incógnita**.

- A los valores directamente proporcionales se les coloca debajo un el signo (+), y en la parte superior el signo (-),
- A los valores inversamente proporcionales al contrario, es decir, debajo tendrán el signo (-), y encima el signo (+)
- El **valor de la incógnita** que se supone llevará el signo (+) será **igual** al producto de todos los valores positivos (+), dividido por el producto de todos los valores negativos (-).

Ejemplo:

Un grupo de 5 obreros edifica un muro de 20 metros de longitud, trabajando durante durante 5 días. ¿Cuanto tiempo tardarán 4 obreros en edificar 32 metros de muro?

Analizando el enunciado del problema se observa que tanto el número de **obreros** como el **tiempo** empleado son valores **inversamente proporcionales** y, por lo tanto, se escribe el signo (+) encima de

los obreros y el signo (-) debajo. En cambio la **longitud** del muro y el **tiempo empleado** son valores **directamente proporcionales** y se escribe el signo (-) encima de la longitud y el signo (+) debajo.

	(+)	(-)	(+)
Supuesto:	5 obreros	20 m	5 días
Pregunta:	4 obreros	32 m	x días
	(-)	(+)	

$$x = \frac{5 \times 32 \times 5}{4 \times 20} \times \frac{800}{80} = 10$$

EL INTERÉS

Es la operación de búsqueda del rendimiento (interés **"i"**) de un capital **"C"** colocado a un tanto por ciento **"%"** durante un cierto tiempo **"t"**. Se clasifica en interés **simple** o **compuesto**.

Se llama **interés simple** cuando el rendimiento producido por el capital no se acumula a éste hasta el final del tiempo acordado.

El **interés compuesto** se produce cuando los intereses producidos por el capital se acumulan a éste, al final del tiempo acordado, para formar un nuevo capital mayor que el anterior.

Capital: $$C = \frac{100 \times i}{\% \times t}$$

Interés: $$i = \frac{C \times \% \times t}{100}$$

Tanto por ciento: $$\% = \frac{100 \times i}{C \times t}$$

Tiempo: $$t = \frac{100 \times i}{C \times \%}$$

La expresión '**t**' del tiempo está en años. Si se expresa el interés en otro tipo de unidad de tiempo el valor 100 se multiplica por el valor de la unidad temporal elegida (12 meses o 52 semanas, etc.).

Ejemplos:

- Hallar el capital que, colocado al 8% de rendimiento anual durante 5 años, nos produce un interés de $2.500.

$$C = \frac{100 \times 2.500}{8 \times 5} = \frac{250.000}{40} = 6.250$$

- Hallar la ganancia que producirán $45.000 al 5% de interés anual durante 6 años.

$$i = \frac{45.000 \times 5 \times 6}{100} = \frac{1.350.000}{100} = 13.500$$

- Hallar el tanto por ciento anual al que se deberá prestar un capital de $50.000, para que produzca un interés de $6.500 en 2 años.

$$\% = \frac{100 \times 6.500}{650.000 \times 2} = \frac{650.000}{100.000} = 6.5$$

- ¿Durante cuánto tiempo un capital de $200.000 al 5% dará un interés de $10.000?

$$t = \frac{100 \times 10.000}{200.000 \times 5} = \frac{1.000.000}{1.000.000} = 1$$

Interés compuesto: $A = a\,(I + r)^n$;

donde **A** es el capital acumulado (capital inicial más los intereses), **a** es el capital inicial, **I** es el interés simple y **r** es el tanto por uno (interés o cantidad devengada por una unidad monetaria en un año y **n** es el número de años durante los cuales el capital está colocado.

ÁLGEBRA

TEORÍA DE CONJUNTOS

Un **conjunto** es la **reunión de varios elementos** para formar un todo. Los objetos que forman parte de un conjunto se llaman **elementos**

Ejemplo: el conjunto de las letras del alfabeto, el conjunto de las vocales, el conjunto de los números naturales, el conjunto de un equipo de fútbol...

Se dice que los elementos que forman un conjunto **pertenecen** a dicho conjunto. El símbolo que se utiliza para indicar la pertenencia es $\in$. Si queremos indicar que la letra **a** pertenece al conjunto de las vocales que llamamos **A** se representa así $a \in A$. Si queremos decir que **H** no pertenece al conjunto de las vocales lo indicamos con el signo $\notin$: $H \notin A$

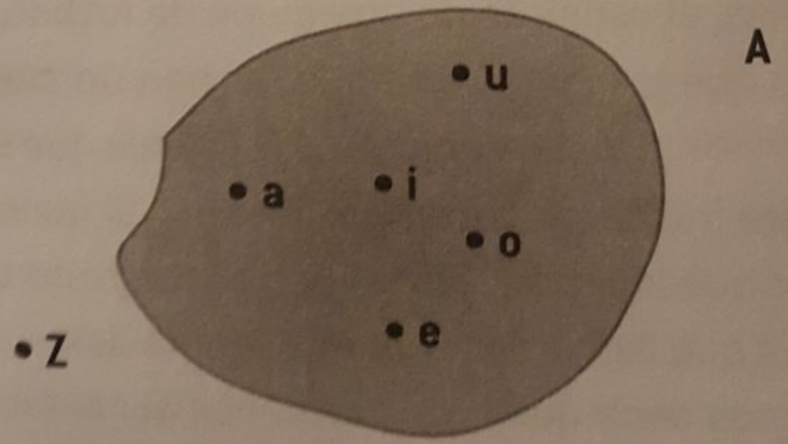
Los **conjuntos se definen** por:

- **extensión:** se enumeran los elementos que lo forman: Se representa así $A = \{a, e, i, o, u\}$

- **compresión**, cuando se enuncian la propiedad común y exclusiva que los define a todos.
  Ejemplo: A = {Conjunto de las vocales}

Para **representar los conjuntos** se utilizan **letras mayúsculas** mientras que los elementos se representan con **minúsculas**. La **representación gráfica** de los **conjuntos** se realiza por medio de los **diagramas de Venn**, que son líneas curvas con los elementos dentro.

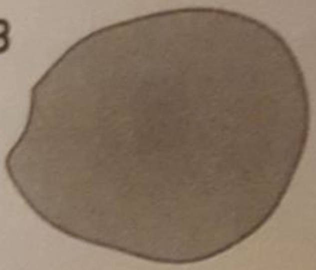
Diagrama DE VENN



A = {Conjunto de las vocales} o
A = {a, e, i, o, u}
$i \in A$, sin embargo $Z \notin A$

Conjunto VACÍO

B



Cuando un conjunto **no tiene elementos**, se llama **conjunto vacío** y se representa con el símbolo ∅.

B = {Conjunto de los perros verdes}.
Como no hay perros verdes, B no tiene elementos, por lo tanto es un conjunto vacío.

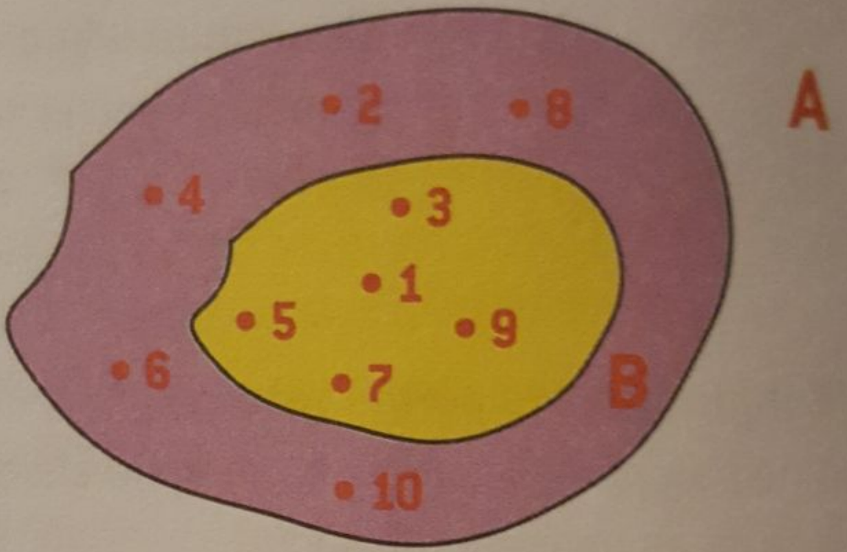
La inclusión

Cuando los elementos de un conjunto **A** pertenecen también a otro conjunto llamado **B** se dice que **A** es un **subconjunto** de **B**, y se representa con el signo ⊂, y se lee **está contenido.**

Ejemplo: **B = {Conjunto de los animales}.**
A = {Conjunto de las aves}

En este caso **A ⊂ B,** ya que la totalidad de las aves pertenece también al conjunto de los animales.
Es decir, que un **conjunto es subconjunto de otro cuando todos los elementos del primero pertenecen también al segundo**.

SUBCONJUNTOS



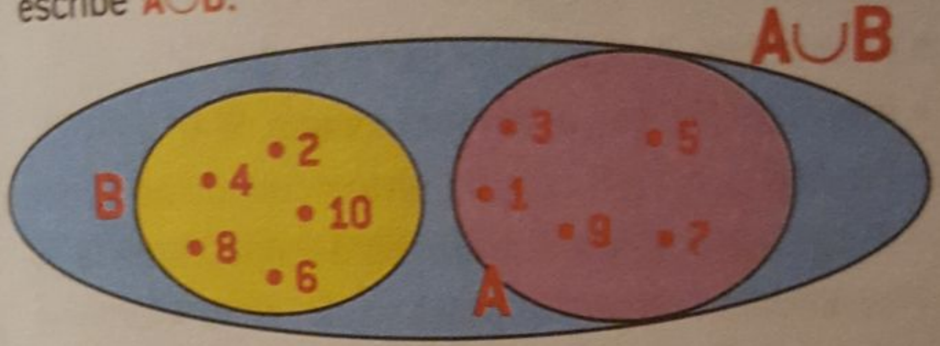
A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
B = {1, 3, 5, 7, 9}
Por lo tanto, **B ⊂ A**
Si el conjunto B fuera **B = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 15}**, no estaría contenido en A, entonces escribiríamos: **B ⊄ A**

Propiedades de la inclusión

- **Reflexiva.** Todo conjunto está contenido en sí mismo. Si tenemos tres conjuntos A, B, y C:
  A ⊂ B → B ⊂ C → A ⊂ C
- Si dos conjuntos A y B están cada uno contenido en el otro son **iguales:**
  A ⊂ B → B ⊂ A → A = C

La unión

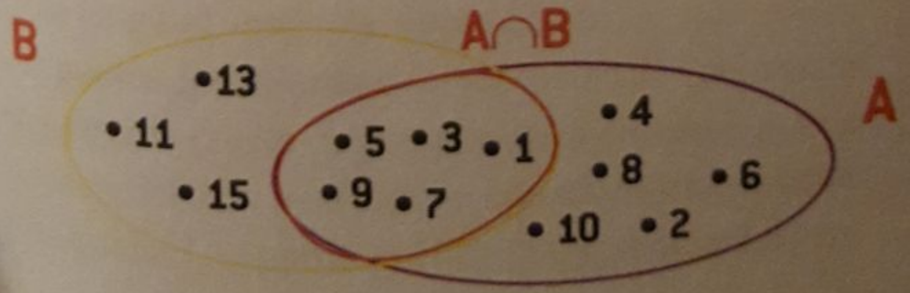
El conjunto que contiene todos los elementos de dos o más conjuntos se le llama **unión** de conjuntos y se escribe **A∪B**.



A = {2, 4, 6, 8, 10}
B = {1, 3, 5, 7, 9}
A∪B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

La intersección

El conjunto de los elementos comunes a dos o más conjuntos se llama **intersección**. Se representa **A⌒B:**
A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
B = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15}
A⌒B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}



Propiedades de la intersección

Si a A∩B **es un subconjunto** de A, está claro que también lo es de B.

- **Clausurativa:** si **A∩A = A**
- **Asociativa: A∩(B∩C) = (A∩B)∩C**
- **Intersección con el conjunto vacío. Si A∩∅ = ∅**
- Se dice que A y B son **disjuntos** cuando **no tienen ningún elemento común**, es decir, cuando **la intersección es un conjunto vacío.** **A∩B = ∅**
- **Absorción:** Si **A ⊂ B → A∩B = A**
- **Conmutativa:** Si **A∩B → B∩A**

Propiedades de la unión.

La unión de conjuntos cumple las propiedades:

- **Clausurativa:** si **A∪A = A**
- **Asociativa: A∪(B∪C) = (A∪B)∪C**
- **Unión con el conjunto vacío. Si A∪∅ = A**
- **Absorción:** Si **A ⊂ B → A∪B = B**
- **Conmutativa:** Si **A∩B → B∩A**

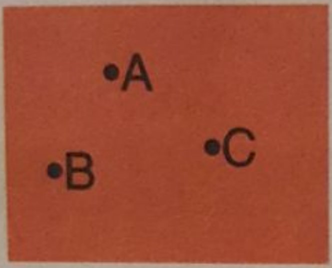
GEOMETRÍA

Es la rama de la **matemática** que estudia diferentes conceptos que se relacionan con el espacio que nos rodea, entre ellos de sus elementos básicos: el **punto**, la **recta** y el **plano** los **puntos**, y partir de éstos las **superficies** colocadas en el espacio, **la medición y el cálculo de ángulos** formados por rectas y las **relaciones del círculo, las rectas y los puntos sobre una superficie**.

EL PUNTO

Es un elemento cuya principal característica es la posición. **No tiene dimensiones**, ya que carece de longitud, anchura, espesor, etc.

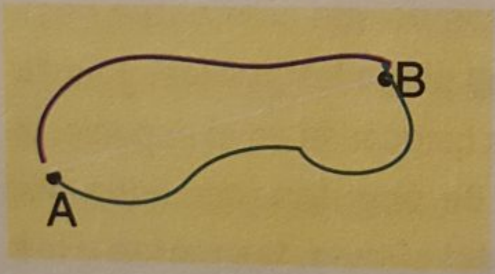
Los **puntos geométricos** se representan con trazos en forma de cruz o con un pequeño círculo que deja la marca del lápiz y se indican con letras mayúsculas (ver gráfico). El **punto gráfico**, a diferencia del geo-



métrico, tiene un tamaño determinado y cumple con las funciones de localización de ciudades y puntos geográficos.

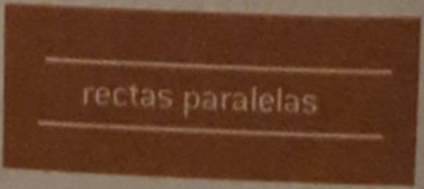
LA LÍNEA

Es la **unión entre dos puntos en el espacio** o sobre una superficie. Una línea tiene **longitud** pero no espesor, es decir es un elemento de una sola di-



mensión. Las líneas pueden **ser rectas, curvas** o **combinadas de rectas y curvas.** Dos puntos pueden unirse con múltiples líneas, sin embargo, **la línea recta** es la **menor distancia entre dos puntos** de una superficie plana. Por un punto pueden pasar infinitas rectas. Dos rectas pueden coincidir en un punto que se llama punto de intersección. Si no se encuentran nunca, se dice que son rectas **paralelas.**

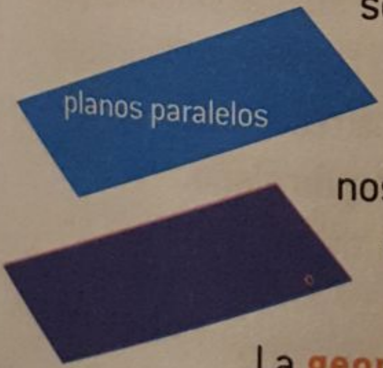
Las líneas rectas siempre pasan por dos puntos y siempre llevan la misma dirección; en cambio las



curvas pueden considerarse como las engendradas por un punto que experimenta cambios de dirección durante un movimiento.

LA SUPERFICIE O EL PLANO

Es la **unión cerrada de líneas y curvas**; tiene longitud y anchura pero carece de espesor y se extiende de manera indefinida. **Toda recta de un plano divide al plano en dos** regiones que se consideran nuevos planos y se les denominan **semiplanos**. Una recta siempre está contenida en un plano. El plano se puede considerar un conjunto de puntos que se extienden en dos dimensiones y puede ser plano o curvo y finito o infinito. Por ejemplo, el plano formado por los ejes cartesianos es una superficie plana infinita y la superficie de una esfera es una superficie curva finita.



La **geometría plana** estudia todas las figuras que pueden ser representadas en una superficie plana: triángulos, cuadrados etc. La **geometría espacial** estudia las figuras geométricas en tres dimensiones: poliedros, esferas, etc.

Semirrecta: cada una de las partes que un punto determina sobre una recta.
Segmento: Porción de recta limitada por dos puntos de la recta. Los **consecutivos** tienen un solo extremo en común. Los **adyacentes** están sobre la misma recta.

LOS ÁNGULOS

Es la parte del plano formada por la **intersección de dos semirrectas** con el mismo origen. A cada una de estas rectas se les llama lados del ángulo y al **punto de intersección** de las rectas **se le llama origen o vértice**.
Los ángulos **se miden** en **grados** sexagesimales (el más utilizado) o centesimales y radianes. El círculo se divide en 360°, mientras que la recta forma un ángulo de 180°, también llamado **ángulo plano.**
La intersección de dos rectas da origen a los siguientes tipos de ángulo:

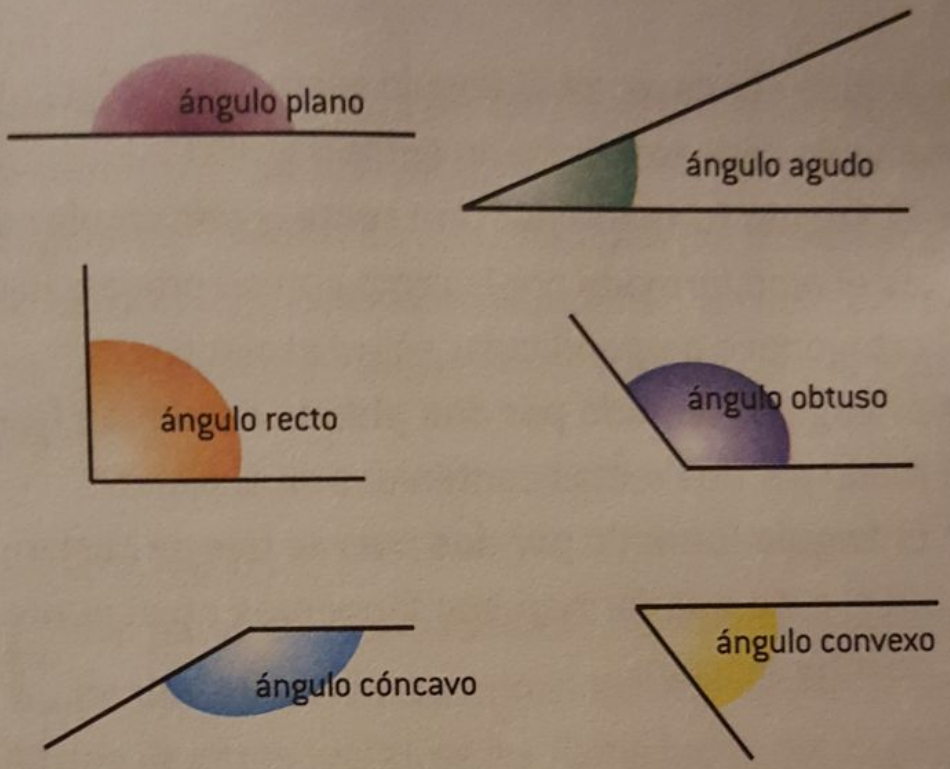
- Ángulo **recto**, forma un ángulo de 90°;
- Ángulo **agudo**, comprendido entre 0 y 90°; es decir su amplitud es menor que la del ángulo recto.
- Ángulo **obtuso**, que corresponde al ángulo entre noventa y ciento ochenta grados;

- Ángulo **cóncavo**, es al ángulo entre 0 y 260° y
- Ángulo convexo, formado entre 0 y 360°.
- El **ángulo** formado por una **recta y por un plano** es el arco formado por la recta con su proyección ortogonal o perpendicular sobre el plano.
- El **ángulo** formado **por dos planos** es el arco formado por dos rectas contenidas en el plano.
- El **ángulo** formado **por dos curvas** que se cortan, es el arco que forman sus tangentes en el punto de intersección.

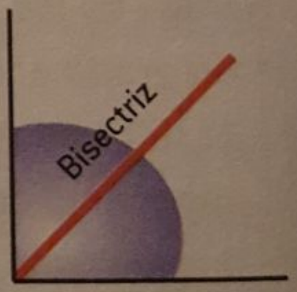
Medida de los ángulos

- Un grado equivale en el sistema sexagesimal a 1/360 partes de la circunferencia. Cada **grado** sexagesimal se divide en **60** partes iguales llamadas **minutos** y cada minuto en **60 segundos**.
- En el sistema circular el **radián** (símbolo rad.), es la **unidad de medida** de un **ángulo plano** y es el ángulo subtendido en el centro de un círculo por un arco de longitud igual al radio del círculo.

  Este sistema también se fundamenta en que la longitud de la circunferencia es **2π veces** la longitud de su radio.
- La longitud de la circunferencia = **2 π r**



Bisectriz: la bisectriz de un ángulo es la semirrecta que tiene origen en el vértice y divide al ángulo en dos ángulos iguales



POLÍGONOS

Se llama **polígono** a la porción de plano **limitada por una línea poligonal** cerrada denominada **contorno**.
El **área** de un polígono es la medida de la superficie que encierra su perímetro.
El **perímetro** de un polígono es la longitud de su contorno, o sea la suma de la longitud de todos sus lados.

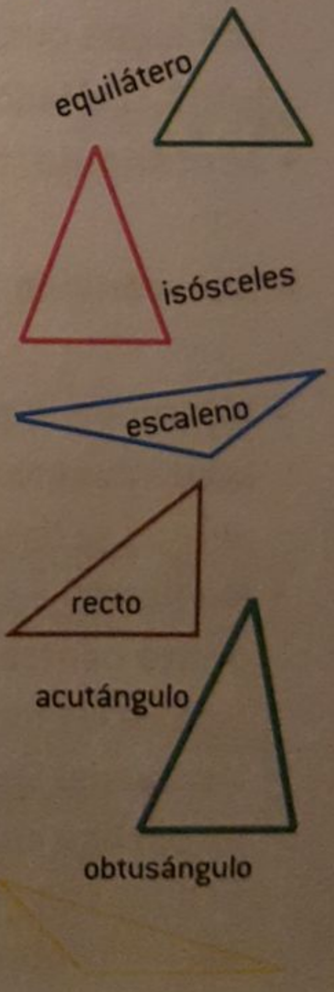
La **diagonal** de un polígono es el segmento determinado por dos vértices no consecutivos.

Los **polígonos** son **regulares** cuando tienen sus **lados y ángulos iguales.**

La **Apotema** de un polígono regular es el segmento perpendicular trazado desde el centro del polígono a uno de sus lados.

Los **polígonos** reciben nombres **según el número de lados** que tengan:

- **triángulos:** 3 lados
- **cuadriláteros:** 4 lados
- **pentágonos:** 5 lados
- **hexágonos:** 6 lados
- **heptágonos:** 7 lados
- **octógonos:** 8 lados
- **eneágonos:** 9 lados
- **decágonos:** 10 lados



Triángulos

Es un plano limitado por tres rectas que se cortan dos a dos; o **la figura plana limitada por tres rectas cuyos ángulos suman 180 grados.**

Podemos **clasificar los triángulos** según sean sus lados y sus ángulos en:

- **Equilátero**, sus tres lados y ángulos son iguales.
- **Isósceles**, tiene dos lados y dos ángulos iguales.
- **Escaleno**, tiene los tres lados y los tres ángulos desiguales.
- **Rectángulo**, uno de los ángulos es de 90° (ángulo recto) y los otros son por tanto complementarios. Los lados que forman el ángulo recto son los catetos, y el lado que los une se llama **hipotenusa.**
- **Acutángulo**, todos los ángulos son menores de 90°.
- **Obtusángulo**, tiene un ángulo mayor de 90°.

- **Altura:** es la **perpendicular desde un vértice al lado opuesto.** El punto de intersección de las tres alturas se llama ortocentro.
- **Mediatriz:** Es la **perpendicular trazada desde el punto central de un lado**. El punto de intersección de las mediatrices se le llama circuncentro.
- **Medianas:** Son los **segmentos de recta que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto**. El punto de intersección de las medianas se llama baricentro o centro de gravedad del triángulo.

Dos **triángulos** son iguales cuando:

- Tienen dos ángulos y el lado común iguales.
- Tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos iguales.
- Tienen los tres lados iguales.

Área del triángulo: $A = \dfrac{\text{base x altura}}{2} = \dfrac{b.a}{2}$

Área de un triángulo rectángulo:

$A = \dfrac{b.h}{2}$ $\quad a = \sqrt{c^2} - b^2$ $\quad b = \sqrt{c^2} . a^2$

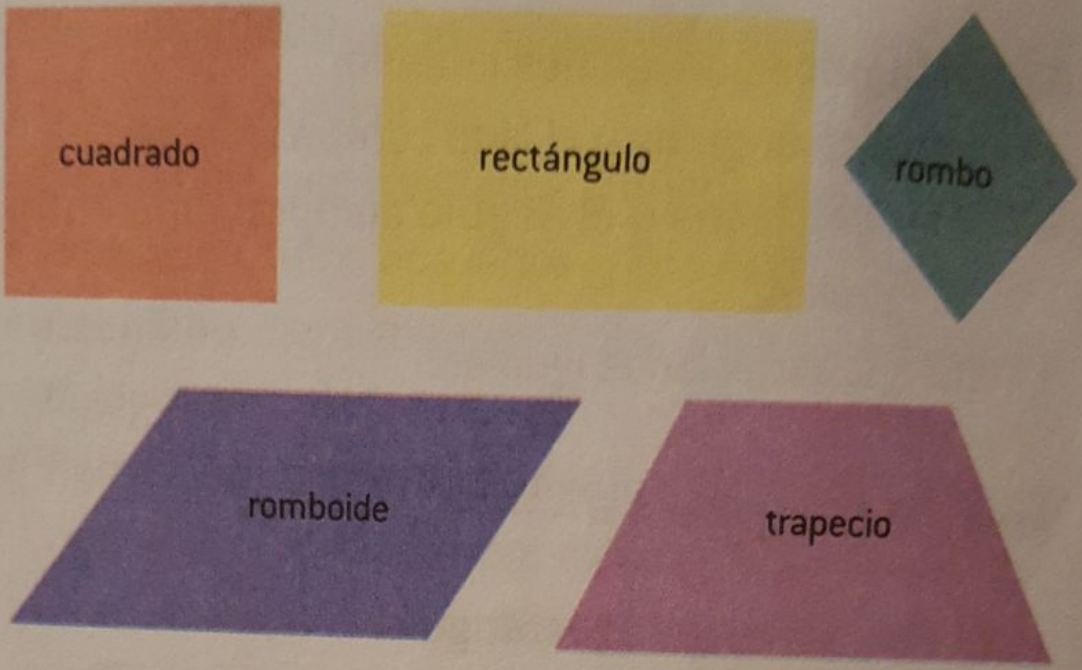
Hipotenusa: $c = \sqrt{a^2} + b^2$

Perímetro de un triángulo: $p = a + b + c$

Cuadriláteros

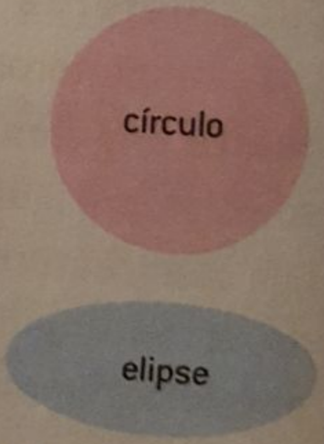
Los cuadriláteros son **polígonos** con **cuatro lados** y **cuatro ángulos**, aunque estas características no son siempre iguales.

Los **cuadriláteros** más interesantes son el **cuadrado**, el **rectángulo**, el **rombo** y el **romboide**, que son **paralelogramos**, y el **trapecio** que no lo es. El trapecio, a su vez puede ser isósceles, rectángulo y escaleno.



La suma de los ángulos de los cuadriláteros es 360°. El **área** de cualquier polígono **se mide en** la unidad de superficie, que es el **m^2**.

Calcular el área de los diferentes polígonos



Cuadrado: $A = l^2$

Rectángulo: $A = b \cdot h$

Rombo: $A = \frac{D.d}{2}$

D y d son las diagonales.

Trapecio: $A = \frac{1}{2} h (a + b)$

Círculo: $A = \pi \cdot r^2$; $\pi = 3{,}1411592$

Longitud circunferencia $= 2 \pi \cdot r = \pi . d$

SISTEMA MÉTRICO

En 1792 los profesores Delambre y Mechain recibieron de la Academia de Ciencias de París el encargo de diseñar un **sistema de medidas universal**. Como unidad de longitud fundamentalmente se determinó la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre comprendido entre Dunkerque y Barcelona; a esta unidad se le puso el nombre de **metro**; término proveniente del griego metrón, que significa medida. En la oficina de Pesas y Medidas de Sévres, Francia, se conserva el patrón del metro líneal, que es una regla de platino iridiado con dos marcas que definen la longitud acordada del metro legal internacional. Las unidades de longitud aumentan y disminuyen de 10 en 10.

El **sistema métrico decimal** aceptado en muchos países, determina unidades de **longitud, superficie, volumen, capacidad y masa**

El **metro** se representa: **m**, y sus múltiplos se forman anteponiendo a la palabra metro, los prefijos griegos: deca, hecto y kilo entre otros, que significan; diez, cien y mil y se escriben: Dm, Hm y Km. Y los submúltiplos del metro se forman anteponiendo la palabra metro a los prefijos latinos deci, centi y mili que son: décima, centésima y milésima parte y se escriben: dm, cm y mm.

MEDIDAS DE LONGITUD

Mm	Miriámetro	10.000 metros
Km	Kilómetro	1.000 metros
Hm	Hectómetro	100 metros
Dm	Decámetro	10 metros
m	metro	1 metro
dm	decímetro	0,1 metro
cm	centímetro	0,01 metro
mm	milímetro	0,001 metro

La **unidad** principal de **superficie** es el **metro cuadrado** (m^2), y se define como la superficie de un cuadrado cuyo lado es un metro de longitud. Las unidades de longitud aumentan y disminuyen de cien en cien.

Otras medidas de longitud

1 Milla terrestre = 1.609,35 metros = 1,6093 Km = = 5.280 pies = 1.760 yardas

1 Milla náutica = 1.853,18 metros = 1,8531 Km = = 6.080 pies

1 **Furlong** = 201,1644 metros

1 **Cuadra** = 100 Varas = 80 metros

1 **Pole** = 5,029 metros

1 **Braza** = 2 varas = 1,672 metros

1 **Yarda** = 3 pies = 0,9144 metros

1 **Vara** = 0,8 metros

1 **Cuarta** (**palmo**) = 0,2 metros

1 **Pie** = 12 pulgadas = 0,3048 metros

1 **Pulgada** = 0,0254 metros

1 **Micrómetro** = 10-6 metros

1 **Nanómetro** = nm = m = 10-9 metros

1 **Angstrom** = A = 10-10 metros

La unidad de las **medidas agrarias** es el **área** que equivale **a 1 Dm^2** y se representa **a** . La **hectárea** es un múltiplo: **1 Ha equivale a 1 Hm^2** y la **centiárea** es un submúltiplo que se simboliza **ca** y **equivale a 1 m^2**.

MEDIDAS DE SUPERFICIE

Mm^2	Miriámetro cuadrado	100 millones de m^2
Km^2	Kilómetro cuadrado	1 millón de m^2
Hm^2	Hectómetro cuad.	10.000 m^2
Dm^2	Decámetro cuadrado	100 m^2
m^2	metro cuadrado	1 m^2
dm^2	decímetro cuadrado	0,01 m^2
cm^2	centímetro cuadrado	0,0001 m^2
mm^2	milímetro cuadrado	0,000001 m^2

Otras medidas de superficie

1 **Milla cuadrada** = 2.589.900 metros cuadrados

1 **Acre** = 4.046,8 metros cuadrados

1 **Hectárea** = Ha = 1 Hm2 = 10.000 metros cuadrados

1 **Área** = 1 Dm2 = 100 metros cuadrados

1 **centiárea** = ca = 0,01 a = 1 metro cuadrado

1 **Rod cuadrado** = 25,293 metros

1 **Yarda cuadrad**a = 0,8361 metros

1 **Pie cuadrado** = 0,0929 metros

1 **Pulgada cuadrada** = 0,000645 metros

MEDIDAS DE VOLUMEN

Mm^3	Miriámetro cúbico	Un billón m^3
Km^3	Kilómetro cúbico	1.000 millones m^3
Hm^3	Hectómetro cúbico	Un millón m^3
Dm^3	Decámetro cúbico	1.000 m^3
m^3	metro cúbico	1 m^3
dm^3	decímetro cúbico	0,001 m^3
cm^3	centímetro cúbico	0,000001 m^3
mm^3	milímetro cúbico	0,000000001 m^3

La unidad de medida del volumen es el **metro cúbico**, que se representa por **m^3**.

Se define como el **volumen de un cubo de un metro de arista.**

Las unidades de volumen aumentan y disminuyen de mil en mil.

La unidad de capacidad es el **litro**, que se representa: **l** .

Se define como la **capacidad** de un **recipiente cuyo volumen equivale a 1 dm^3**.

Las unidades de capacidad aumentan y disminuyen de diez en diez.

Otras medidas de masa

1 Tonelada americana = 907,18 Kilogramos =
= 20 Quintales = 80 Arrobas = 1814,36 Libras

1 Quintal americano = 45,359 Kilogramos =
= 1/20 de Tonelada = 4 Arrobas

1 Arroba = 1/4 de Quintal = 12,5 Kilogramos = 25 Libras

1 Libra americana = 0,45359 Kilogramos
= 1/25 de Arroba = 16 Onzas

1 Onza americana = 0,028349 Kilogramos = 1/16 de Libra

1 Grano = 0,0000648 Kilogramos

1 Onza troy = 0,031103 Kilogramos

1 Libra troy = 0,37324 Kilogramos

1 Dracma = 0,00177 Kilogramos

1 Stone = 6,348 Kilogramos.

Si buscamos reducir un número formado por varias unidades de medida a una sola unidad, hay que convertir cada una de las unidades a dicha unidad y luego sumar todos los resultados.